Γραμμικη Αλγεβρα II

Προχειρη Δοκιμασια 4

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

2 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε έναν πίνακα* $A \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ *για τον οποίο ισχύει ότι:*

$$A^2 - 5A + 6I_3 = \mathbb{O}$$

(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας* A *είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Να δείξετε ότι ο πίνακας* A *είναι αντιστρέψιμος.*
(3) *Να βρεθεί ο αντίστροφος* A^{-1} *συναρτήσει των πινάκων* A *και* I_3.

Γραμμικη Αλγεβρα ΙΙ

Προχειρη Δοκιμασια 4

Διδασκοντες: Ν. Μαρμαρίδης- Α. Μπεληγιάννης

Βοηθος Ασκησεων: Χ. Ψαρουδάκης

Ιστοσελιδα Μαθηματος:

http://users.uoi.gr/abeligia/LinearAlgebraII/LAII.html

2 - 5 - 2012

Άσκηση 1. *Θεωρούμε έναν πίνακα $A \in \mathsf{M}_{3\times 3}(\mathbb{R})$ για τον οποίο ισχύει ότι:*

$$A^2 - 5A + 6I_3 = \mathbb{O} \qquad (*)$$

(1) *Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.*
(2) *Να δείξετε ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος.*
(3) *Να βρεθεί ο αντίστροφος A^{-1} συναρτήσει των πινάκων A και I_3.*

Λύση. **1.** *Θεωρούμε το πολυώνυμο $P(t) = t^2 - 5t + 6$. Τότε προφανώς θα έχουμε*

$$P(A) = A^2 - 5A + 6I_3 = \mathbb{O}$$

Επειδή το πολυώνυμο $P(t)$ μηδενίζει τον πίνακα A, έπεται ότι το πολυώνυμο $P(t)$ θα διαιρείται από το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ του A: $Q_A(t)/P(t)$. Επειδή $P(t) = (t-2)(t-3)$ το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ θα είναι ένα εκ των:

$$Q_A(t) = t-2 \quad ή \quad Q_A(t) = t-3 \quad ή \quad Q_A(t) = (t-2)(t-3) \qquad (**)$$

Συνεπώς, σε κάθε περίπτωση το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ είναι γινόμενο διακεκριμένων πρωτοβαθμίων παραγόντων και άρα ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος.

2. *Πρώτος Τρόπος: Επειδή ο πίνακας A είναι διαγωνοποιήσιμος και το ελάχιστο πολυώνυμο $Q_A(t)$ έχει τις ίδιες ρίζες με το χαρακτηριστικό πολυώνυμο $P_A(t)$ του A, από την $(**)$ έπεται ότι οι ιδιοτιμές του A είναι: $\lambda = 2$ (με πολλαπλότητα 3) ή $\lambda = 3$ (με πολλαπλότητα 3) ή $\lambda_1 = 2$ και $\lambda_2 = 3$ (όπου είτε η ιδιοτιμή 2 έχει πολλαπλότητα 2 και η ιδιοτιμή 3 έχει πολλαπλότητα 1 ή η ιδιοτιμή 2 έχει πολλαπλότητα 1 και η ιδιοτιμή 3 έχει πολλαπλότητα 2). Επομένως σε κάθε περίπτωση ο πίνακας A δεν έχει ως ιδιοτιμή το 0 και άρα[1] είναι αντιστρέψιμος.*

Ο Δεύτερος Τρόπος: περιγράφεται παρακάτω και μας δίνει άμεση απάντηση και στο ερώτημα **3.***:*

3. *Απο την σχέση $(*)$ θα έχουμε:*

$$A^2 - 5A + 6I_3 = \mathbb{O} \implies A\cdot(A - 5I_3) = -6I_3 \implies$$

$$A\cdot\left(-\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I_3\right) = I_3 = \left(-\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I_3\right)\cdot A$$

Η τελευταία σχέση δείχνει ότι ο πίνακας A είναι αντιστρέψιμος και επιπλέον:

$$A^{-1} = -\frac{1}{6}A + \frac{5}{6}I_3$$

□

[1] Υπενθυμίζουμε ότι: $|A| = 0$ αν και μόνον αν το 0 είναι ιδιοτιμή του A.